الإجابة النموذجية لاختبار الرياضيات

حل التمرين الأول(7 ن)

1) دراسة طبيعة المتتاليات التالية

U_n متقاربة لأن

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2}} = 0$$ 1,5

U_n متباعدة لأن

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2+1}{2n+1} = +\infty$$ 1,5

2) دراسة طبيعة السلاسل التالية

2 السلسلة ذات الحد العام $U_n = \frac{3^n}{2^n}$ هي سلسلة هندسية أساسها $q = \frac{3}{2} > 1$ إذن **فهي متباعدة** (ويمكن تطبيق قاعدة كوشي)

السلسلة ذات الحد العام $U_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ هي سلسلة متقاربة وذلك بعد تطبيق قاعدة كوشي أي

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{1}{2} < 1$$ 2

حل التمرين الثاني(5 ن)

1)
$$f(x) = x^{\ln x} \Rightarrow \ln f(x) = \ln x . \ln x$$
$$\Rightarrow \ln f(x) = (\ln x)^2$$
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x}\ln x$$ 2,5
$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{2}{x}\ln x\right) x^{\ln x}$$

2)
$$I = \int (3x^2 - 5x + 4)e^x dx = P(x)\, e^x + c \quad \rightarrow ①$$

نضع $Q(x) = 3x^2 - 5x + 4$ إذن :

$P(x)$ هو كثير حدود من الدرجة الثانية أي: $P(x) = ax^2 + bx + c$

من المعادلة ① ينتج $Q(x) = p(x) + p'(x)$

2,5
$$3x^2 - 5x + 4 = ax^2 + bx + c + 2ax + b$$
$$= ax^2 + (b + 2a)x + (c + b)$$

بالمقارنة نجد:
$$\begin{cases} a = 3 \\ b + 2a = -5 \\ c + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -11 \\ c = 15 \end{cases}$$

إذن:

$$I = \int (3x^2 - 5x + 4)e^x dx = (3x^2 - 11x + 15)\, e^x + c$$

حل التمرين الثالث:(8 ن)

$$Z = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + xy + 18$$

$Z'_x = x^2 + y$ 0,5

$Z'_y = 2y + x$ 0,5

التفاضل الكلي لهذه المعادلة هو : $dZ = Z'_x dx + Z'_y\, dy$

$$dZ = (x^2 + y)dx + (2y + x)dy$$ 1

2) تحديد النقاط الحرجة لهذه الدالة مع تحديد نوعها :

0,5 0,5

لدينا : $\begin{cases} Z'_x = 0 \\ Z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 & \rightarrow ① \\ 2y + x = 0 & \rightarrow ② \end{cases}$

من المعادلة ② نجد : $x = -2y$

نعوض في ① نجد : $(-2y)^2 + y = 0$

$$4y^2 + y = 0 \Rightarrow y(4y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 & \rightarrow & x = 0 \\ y = \frac{-1}{4} & \rightarrow & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$ 1 1

إذن : $(0,0)$ و $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$ هي نقاط حرجة

لتحديد نوعية هذه النقاط يجب حساب

$$\Delta = \left(Z''_{xx}Z''_{yy} - Z''_{xy}Z''_{yx}\right)_{(x_0,y_0)}$$

حساب المشتقات الجزئية من المرتبة 2

0,25 0,25 0,25 0,25

$Z''_{xx} = 2x, \quad Z''_{yy} = 2, \quad Z''_{xy} = 1, \quad Z''_{yx} = 1$

$\Delta = 4x - 1$ 0,25

من أجل $(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow \Delta = -1 < 0$ 0,25

إذن $(0,0)$ هي نقطة سرج 0,5

0,5

من أجل

$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right) \Rightarrow \Delta = 1 > 0, \quad Z''_{xx} = 1 > 0$ et $Z''_{yy} = 2 > 0$

إذن $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$ هي نقطة حدية صغرى 0,5